

積の要約

$\prod$ の恒等式・変形・収束判定

常備用の要約・断りのない限り $a_k > 0$ とし、対数をとる操作を許す

0 定義と約束

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m a_{m+1} \cdots a_n, \quad \prod_{k \in S} a_k$$

- **空積**は1。 $n < m$ または $S = \emptyset$ のとき積は1である。他のすべての恒等式が成り立つための約束であり、決して0としてはならない。
- **一項の積**。 $\prod_{k=m}^m a_k = a_m$ 。分割は自動的に従う。
- $\prod$ は $\sum$ の乗法版である。 $a_k > 0$ である限り、和について知っていることはすべて対数を通して積に移る。
- 有限の添字集合では順序は問題にならない（可換性）。行列や作用素では問題になる（§12）。

相加相乗平均

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad a_k \geq 0$$

等号成立は全ての a_k が等しいときに限る。重み付きの形は $\sum w_k = 1, w_k \geq 0$ のもとで $\prod a_k^{w_k} \leq \sum w_k a_k$ （ヤング/ヘルダーの不等式）。

積分積（連続極限）

$$\prod_a^b (1 + f(x) dx) = \exp \int_a^b f(x) dx$$

1 有限積の代数

$$\prod_k (a_k b_k) = \left(\prod_k a_k \right) \left(\prod_k b_k \right), \quad \prod_k a_k^p = \left(\prod_k a_k \right)^p$$

$$\prod_{k=m}^n c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k \quad \text{因子を数えよ}$$

$$\prod_{k=m}^n c^k = c^{\binom{n+1}{2} - \binom{m}{2}}$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^j a_k \cdot \prod_{k=j+1}^n a_k \quad \text{分割}$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t} \quad \text{ずらし}$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^n a_{m+n-k} \quad \text{反転}$$

$$\prod_i \prod_j a_{ij} = \prod_j \prod_i a_{ij} \quad \text{フビニ}$$

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_i b_j = \left(\prod_i a_i \right)^n \left(\prod_j b_j \right)^m$$

全単射による添字の付け替え。 $\sigma: S \rightarrow T$ が全単射ならば $\prod_{k \in S} a_{\sigma(k)} = \prod_{t \in T} a_t$ 。巧妙に見える積の評価のほとんどは、 $k \leftrightarrow n-k, d \leftrightarrow n/d, k \leftrightarrow 2k/2k+1$ といった対応づけを隠しているにすぎない。

2 対数と指数の双対性

$a_k > 0$ のとき

$$\prod_k a_k = \exp \left(\sum_k \log a_k \right), \quad \log \prod_k a_k = \sum_k \log a_k$$

和の技法はすべて積の技法になる。部分分数分解は因子のテレスコープに、アーベルの総和法、オイラー・マクローリン、優収束定理、コーシーの判定法もそのまま移る。

対数微分（積を極の和に変える）

$$\frac{d}{dz} \log \prod_k f_k(z) = \frac{(\prod_k f_k)' }{\prod_k f_k} = \sum_k \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}$$

一般化された積の微分法則

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k \right)' = \sum_{j=1}^n f_j' \prod_{k \neq j} f_k$$

3 テレスコープ — 最も有用な技法

$a_k = \frac{f(k+1)}{f(k)}$ と書けるならば

$$\prod_{k=m}^n \frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{f(n+1)}{f(m)}$$

方針。 a_k を因数分解し、 $f(k) \mapsto f(k+1)$ あるいは $f(k+j)$ というずれを探す。多項式の比がテレスコープするのは、分子と分母の根が整数だけ隔たっているときに限る。

標準的なテレスコープ

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = n+1, \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}$$

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} \quad \text{二進}$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$$

最後の例： $k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$ 、 $k^3 + 1 = (k+1)(k^2 - k + 1)$ 、そして $f(k) = k^2 + k + 1$ とおくと $k^2 - k + 1 = f(k-1)$ 。二つのテレスコープが同時に起きている。

3 テレスコープ — 最も有用な技法 (続き)

乗法的差分学

$(\Delta_{\times} f)(k) = f(k+1)/f(k)$ とすると、微分積分学の基本定理にあたるものは $\prod_{k=m}^n (\Delta_{\times} f)(k) = f(n+1)/f(m)$ であり、「乗法版の部分積分」は

$$\prod_k f(k)^{\Delta g(k)} = (\text{境界項}) / \prod_k g(k+1)^{\Delta \log f(k)}$$

4 階乗・下降べき・上昇べき

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \quad 0! = 1 \quad (\text{空積})$$

$$x^{\underline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad \text{下降}$$

$$(x)_n = x^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \quad \text{上昇}$$

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n! = (2n)!!$$

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!!$$

$$\prod_{k=1}^n k! = G(n+2) \quad \text{バーンズ } G, \quad \prod_{k=1}^n k^k = H(n) \quad \text{超階乗}$$

ヴァンデルモンドの行列式

$$\det(x_i^{j-1})_{i,j=1}^n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

下降べきの合成と反転

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}} \cdot (x-m)^{\overline{n}}, \quad x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$$

5 ガンマ関数 — 連続化された階乗

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!$$

オイラーの極限と積表示

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{\prod_{k=0}^n (z+k)} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^z}{1+z/n}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad \text{ワイエルシュトラス}$$

相反公式と倍数公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad \text{ルジャンドル}$$

5 ガンマ関数 — 連続化された階乗 (続き)

ガウスの乗法公式 — ずれの積の一般形

$$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-mz} \Gamma(mz)$$

使い方：範囲を動く一次因子の積 $\prod_k (ak+b)$ はガンマ関数の比にまとまる。 $\prod_{k=0}^{n-1} (ak+b) = a^n \Gamma(n+b/a)/\Gamma(b/a)$ 。これが一次因子の積に対する普遍的な「閉じた形」である。

6 1の冪根と多項式の積

$\omega = e^{2\pi i/n}$ とすると

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega^k), \quad x^n - a^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - a\omega^k)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n, \quad \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin(n\pi/2)}{2^{n-1}}$$

円分多項式とメビウスの反転

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x), \quad \Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

• **ヴィエト**。最高次係数 1 の n 次多項式 $p(x) = \prod_i (x - r_i)$ は $\prod_i r_i = (-1)^n p(0)$ をみtas。より一般に $p(c) = \prod_i (c - r_i)$ 。因子を掛けるのではなく多項式を評価せよ。

• **終結式**。

$$\text{Res}(f, g) = a^{\deg g} b^{\deg f} \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = a^{\deg g} \prod_i g(\alpha_i)$$

• **行列式**。 $\det A = \prod_i \lambda_i$ 、 $\det(AB) = \det A \det B$ 、 $\det e^A = e^{\text{tr} A}$ 。

7 数論における積

$n = \prod_p p^{v_p(n)}$ ($v_p \neq 0$ は有限個) とすると

$$\tau(n) = \prod_{p|n} (v_p + 1), \quad \sigma_s(n) = \prod_{p|n} \frac{p^{s(v_p+1)} - 1}{p^s - 1}$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$$

- f が乗法的ならば $f(n) = \prod_{p^a \parallel n} f(p^a)$ 。理論全体が「素数べきの上で定義し、積をとる」という一言に尽きる。
- **ウィルソン**。素数 p に対し $\prod_{k=1}^{p-1} k \equiv -1 \pmod{p}$ 。
- **オイラー積**。乗法的な f が $\sum |f(n)| n^{-\sigma} < \infty$ をみた

7 数論における積 (続き)

すとき

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

とくに $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ ($\Re s > 1$) であり

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}$$

- **メルテンスの第三定理**。 $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sim e^\gamma \log x$ 。

8 q -積・分割・データ

q -ポツホハマー記号 (無限積の場合は $|q| < 1$) :

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad (a; q)_\infty = \prod_{k \geq 0} (1 - aq^k)$$

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$$

オイラーの分割母関数

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k} = \sum_{n \geq 0} p(n) q^n$$

$$\prod_{k \geq 1} (1 + q^k) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^{2k-1}}$$

8 分割・五角数・データ

五角数定理

$$\prod_{k \geq 1} (1 - q^k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{j(3j-1)/2}$$

ヤコビの三重積 – 以下の多くはここから出る

$$\prod_{m \geq 1} (1 - q^{2m}) (1 + q^{2m-1} z) (1 + q^{2m-1} z^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} z^n$$

8 分割・五角数・データ (続き)

 q -二項定理とデデキントのエータ

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} z^n = \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty}, \quad \eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$$

$$q = e^{2\pi i \tau}.$$

9 無限積の収束

積は必ず $\prod_{k \geq 1} (1 + a_k)$ の形に書き直す (極限値を先に括り出す)。

定義。有限個の因子を除いたのち、部分積が 0 でない極限に収束するとき $\prod_{k \geq 1} (1 + a_k)$ は**収束**するという。0 に近づく場合は 0 への**発散**と数える。

必要条件。 $a_k \rightarrow 0$ 。十分ではない: $\prod (1 + 1/k)$ は発散する。

主判定法。 $a_k \neq -1$ のとき、積が収束することと $\sum_k \log(1 + a_k)$ が収束することは同値である (分枝を固定する。 $|a_k| < 1$ となれば有効)。

絶対収束。 $\sum_k |a_k| < \infty \iff \prod_k (1 + |a_k|) < \infty$ 。このとき $\prod (1 + a_k)$ は収束し、値は項の並べ替えで変わらない。

正項の場合。 $a_k \geq 0$ なら $\prod (1 + a_k)$ が収束 $\iff \sum a_k < \infty$ 。 $0 \leq a_k < 1$ なら $\prod (1 - a_k) > 0 \iff \sum a_k < \infty$ 。 $\sum a_k = \infty$ ならば $\prod (1 - a_k) = 0$ 。

二次の判定。 $\sum a_k$ が収束しても $\sum a_k^2$ が発散すれば積は 0 に発散する。 $\log(1 + a_k) = a_k - \frac{1}{2} a_k^2 + O(a_k^3)$ 。二次の項を必ず確認せよ。

一様収束・解析性。 f_k が領域 Ω 上で正則で、任意のコンパクト集合 K 上 $\sum_k \sup_K |a_k| < \infty$ ならば $\prod (1 + a_k)$ はコンパクト一様収束し、正則関数 F を

9 無限積の収束 (続き)

定める。 $F(z) = 0$ となるのは、ある因子が消える点に限り、その重複度は各因子の重複度の和である (ワイエルシュトラス)。

有用な評価

$$\prod_k (1 + a_k) \leq \exp\left(\sum_k a_k\right) \quad (a_k \geq 0)$$

$$\prod_k (1 + a_k) \geq 1 + \sum_k a_k \quad (a_k \geq 0)$$

$$\prod_k (1 - a_k) \geq 1 - \sum_k a_k \quad (0 \leq a_k \leq 1)$$

$$\left| \prod_k (1 + a_k) - 1 \right| \leq \exp\left(\sum_k |a_k|\right) - 1$$

最後の評価は打ち切り誤差の見積もりに使える。無限積を途中で止めたときの誤差は $\sum |a_k|$ の尾部で押さえられる。

10 古典的な無限積

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{オイラー}$$

10 古典的な無限積 (続き)

$$\cos \pi z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$$

$$\sinh \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} \quad \text{ヴィエト}$$

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \quad \text{ウォリス}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sinh \pi}{\pi}$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$\sin / \cos$ の一族はすべて一つの事実の言い換えである。位数 1 の整関数は零点によって e^{az+b} を除いて定まる (アダマール)。上の正

10 古典的な無限積 (続き)

弦の積に $z = 1/2$, $z = i$, $z = 1/4$ を代入すれば、ウォリスの公式や $\sinh \pi / \pi$ が出てくる。

11 零点から関数を作る

ワイエルシュトラスの初等因子

$$E_0(w) = 1 - w$$

$$E_p(w) = (1 - w) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{w^j}{j}\right), \quad p \geq 1$$

指数部分は収束因子である。 $|w| \leq 1$ のとき $|1 - E_p(w)| \leq |w|^{p+1}$ 。

ワイエルシュトラスの因数分解定理

零点 $a_1, a_2, \dots$ (重複を込め $a_n \rightarrow \infty$) と 0 における位数 m の零点をもつ $f \neq 0$ は

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

と書ける。 g は整関数、 p_n は任意の r に対し $\sum_n (r/|a_n|)^{p_n+1} < \infty$ となるように選ぶ。

アダマールの定理

f の位数が ρ で有限ならば、 $p = \lfloor \rho \rfloor$ を一様にとることができ、 g は次数 $\leq \rho$ の多項式となる：

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geq 1} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right), \quad \deg g \leq \rho$$

帰結：収束指数について $s > \rho$ ならば $\sum |a_n|^{-s} < \infty$ 。有限位数で零点をもたない整関数は $e^{g(z)}$ の形に限る。正弦の積と $1/\Gamma$ が $\rho = 1$ の二つの標準例である。

12 順序つき (非可換) 積

行列や作用素では順序の約束を決め、明示せよ。

$$\overrightarrow{\prod}_{k=1}^n A_k = A_1 A_2 \cdots A_n, \quad \overleftarrow{\prod}_{k=1}^n A_k = A_n \cdots A_1$$

• $\det \prod_k A_k = \prod_k \det A_k$ 、また $(\prod_k A_k)^{-1} = \overleftarrow{\prod}_k A_k^{-1}$ (順序が逆になる)。

• tr は巡回的であって乗法的ではない。 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ だが $\text{tr}(AB) \neq \text{tr} A \text{tr} B$ 。

• $e^A e^B = e^{A+B}$ が成り立つのは $[A, B] = 0$ のときに限る。一般には BCH 公式か、リー・トロットターの積 $e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n$ を用いる。

• **積分積・時間順序指数。** $Y'(t) = A(t)Y(t)$ 、 $Y(0) = I$ の解は

$$Y(t) = \mathcal{T} \exp \int_0^t A(s) ds = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \overleftarrow{\prod} (I + A(t_j) \Delta)$$

• $\prod (I + A_k)$ の収束は $\sum_k \|A_k\| < \infty$ ならば保証される。

13 積の漸近挙動

対数を取り、和について知っていることを使う。

$$\log \prod_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \log f(k) \\ \approx \int_1^n \log f(x) dx + \frac{1}{2} \log f(n) + \cdots$$

オイラー・マクローリン。補正項がスターリングの $\sqrt{2\pi n}$ を与える。

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right) \\ \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \sim \frac{n^x}{\Gamma(x+1)}$$

小さい因子の線形化

$\max_k |a_k| \rightarrow 0$ かつ $\sum_k a_k \rightarrow S$ 、 $\sum_k a_k^2 \rightarrow 0$ ならば $\prod_k (1 + a_k) \rightarrow e^S$ 。ポアソン近似の原動力である。すなわち $\prod_i (1 - p_i) \approx e^{-\sum_i p_i}$ が成り立つ。

感度

$$\frac{\delta P}{P} = \sum_k \frac{\delta a_k}{a_k}$$

相対誤差は加算される。各因子が精度 ε で分かっている n 個の積は、精度 $\approx n\varepsilon$ でしか分からない。

14 確率と母関数

- **独立性。** $\mathbb{P}(\cap_k E_k) = \prod_k \mathbb{P}(E_k)$ 、独立な X_k に対し $\mathbb{E} \prod_k X_k = \prod_k \mathbb{E} X_k$ 。
- **生存確率・少なくとも一つ。** $\mathbb{P}(\text{一つも起きない}) = \prod_k (1 - p_k) \approx e^{-\sum p_k}$ (すべての p_k が小さいとき)。
- **誕生日型。** $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \approx e^{-n^2/2N}$ 。
- 独立な確率変数の和の母関数 (積率母関数・確率母関数) は各母関数の積である。特性関数も同様で、密度の畳み込みに対応する。
- **部分集合と多重集合。** $\prod_i (1 + x^{a_i})$ は重み付きの部分集合を数え、 $\prod_i \frac{1}{1 - x^{a_i}}$ は多重集合を数える。
- 二次モーメント法、ロヴァースの局所補題型の評価、チェルノフ限界はいずれも $\prod_k \mathbb{E} e^{\lambda X_k}$ の評価に帰着する。

15 陥りやすい誤りと検算

- **空積は1であって0ではない。** $n = m - 1$ の境界の場合を必ず確認せよ。
- **因子を数えよ。** $\prod_{k=m}^n c = c^{n-m+1}$ 。この一つずれがこの要約で最も多い誤りである。
- **零因子が一つあれば全体が消える。** 積で割る前に、どの因子も0でないことを確かめよ。たとえば $\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n)$ は n が偶数のとき0である。
- **0への収束は発散である。** 無限積では $\prod(1 - 1/k) = 0$ は素朴な意味では「収束」だが、発散する積として扱う。

15 陥りやすい誤りと検算 (続き)

- **対数は符号と分枝に注意。** 複素数の因子や符号の変わる因子では、まず符号を括り出すか、 $|a_k| < 1$ となってから $\log(1 + a_k)$ を使う。
- **$\sum a_k$ の収束は $\prod(1 + a_k)$ の収束を意味しない。** $\sum a_k^2$ を確認せよ。反例: $a_k = (-1)^k / \sqrt{k}$ 。
- **条件収束する積の並べ替えは値を変える。** 級数と同じ。
- **順序付きの積は交換しない。** $\prod_k A_k^{-1} \neq (\prod_k A_k)^{-1}$ (順序を逆にしない限り)。
- **数値計算では下位桁が落ちる。** $\sum \log a_k$ を累積するか、途中で規格化する。 a_k が小さいときは $\log_{10}(a_k)$ を使う。
- **主張した恒等式は小さい n で検算せよ。** $n = 1, 2, 3$ を手で確かめ、無限積は 10^3 項ほどで数値的に確かめる。誤差は $\exp(\sum |a_k|) - 1$ で押さえられる。

16 対応表 — 和 $\leftrightarrow$ 積

和	積
$\sum a_k$	$\prod a_k$
0 (空和)	1 (空積)
$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$	$f(k+1)/f(k)$
テレスコープ和	テレスコープ積
相加平均	相乗平均
$\sum$ が収束	$\prod(1 + a_k)$ が収束
絶対収束 $\sum a_k $	$\prod(1 + a_k) < \infty$
部分分数分解	因数分解とずらし
アーベルの総和法	乗法版の部分積分
$e^{\sum}$	$\prod(e^{\cdot})$
ディリクレ級数 $\sum f(n)n^{-s}$	オイラー積 $\prod_p(\cdots)$
$\log \Gamma$ 、ディガンマ ψ	Γ 、 $1/\Gamma$
f'/f の極	f の零点

17 手順 — 見知らぬ積への取り組み方

1. **規格化する。** 定数と主要な増大度を先に括り出し、各因子を $a_k \rightarrow 0$ となる $1 + a_k$ の形に書く。
2. **完全に因数分解する。** 平方差・立方差、 $k^2 \pm k + 1$ 、円分多項式、三角関数の積和公式。整数だけ隔たった根を探す。
3. **テレスコープを探す。** $a_k = f(k+1)/f(k)$ あるいは $f(k+j)/f(k)$ と書けるか。根が整数だけ隔たった多項式の比は、必ずガンマ関数の比に収まる。
4. **さもなくば対数をとる。** $\sum \log(1 + a_k)$ を二次の項まで展開して収束を判定し、漸近展開はオイラー・マクローリンで行う。
5. **形を見抜く。** $\prod(1 - z^2/n^2) \Rightarrow$ 正弦。 $\prod(1 + z/n)e^{-z/n} \Rightarrow 1/\Gamma$ 。 $\prod(1 - q^k) \Rightarrow$ 分割・エータ。 $\prod_p(\cdots) \Rightarrow$ ディリクレ級数。
6. **検算する。** 小さい n を手で、次に数値的に。尾部は $\exp(\sum_{k>N} |a_k|) - 1$ で押さえる。