

# 組合せ論

## 順列・組合せと二項係数の恒等式

常備用の要約・約束： $n, k, m \in \mathbb{Z}$ 、 $k < 0$  または  $k > n \geq 0$  のとき  $\binom{n}{k} = 0$  とする

### 1 基礎原理

#### 数え上げの原則

**積の法則。**独立な  $r$  段階からなる操作で各段階の選択肢が  $n_1, \dots, n_r$  であるとき、総数は  $n_1 n_2 \cdots n_r$  である。

**和の法則。**互いに素な場合分け  $A_1, \dots, A_r$  に対し  $|\bigcup A_i| = \sum |A_i|$ 。

**全単射の原理。** $f: A \rightarrow B$  が全単射ならば  $|A| = |B|$ 。最も強力な道具である。難しい集合を易しい集合に数え換える。

**二重数え上げ。**一つの集合を二通りに数えれば恒等式が得られる。

**鳩の巣原理。** $n$  個を  $m$  個の箱に入れると、少なくとも一つの箱には  $\lceil n/m \rceil$  個以上入る。

#### 階乗

$$n! = \prod_{i=1}^n i, \quad 0! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

### 2 順列と組合せ

#### 順序を考える選び方 ( $k$ -順列)

$$P(n, k) = {}^n P_k = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$$
$$n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ 個の因子}}$$

下降階乗という。 $n^{\underline{0}} = 1$ 、 $n^{\underline{n}} = n!$ 。

#### 順序を考えない選び方

$$\binom{n}{k} = {}^n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

$$P(n, k) = k! \binom{n}{k} \quad \text{順序を考えるなら } k! \text{ 倍する}$$

#### 上昇階乗 (級数の計算に用いる)

$$x^{\overline{k}} = x(x+1) \cdots (x+k-1), \quad x^{\underline{k}} = (-1)^k (-x)^{\overline{k}}$$

#### 一般化二項係数

任意の  $x \in \mathbb{C}$  と  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し

$$\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1) \cdots (x-k+1)}{k!}$$

ニュートンの級数や負の上添字の恒等式が成り立つのは、この定義による。

### 3 標本抽出の四類型

$n$  種類から  $k$  個を選ぶとき：

|      | 重複なし                | 重複あり               |
|------|---------------------|--------------------|
| 順序あり | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $n^k$              |
| 順序なし | $\binom{n}{k}$      | $\binom{n+k-1}{k}$ |

右下は重複組合せの係数であり  $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$  と書く。

#### 多重集合の順列

$r$  種類の要素をそれぞれ  $n_1, \dots, n_r$  個もつ  $n$  個の並べ方 ( $\sum n_i = n$ )：

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

#### 円順列

相異なる  $n$  個を円周上に並べる： $(n-1)!$

裏返しを同一視する場合 (首飾り)： $n \geq 3$  で  $\frac{(n-1)!}{2}$ 。

### 4 主要な恒等式

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{対称性}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{パスカルの法則}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{吸収律}$$

$$(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k} \quad \text{余吸収律}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} \quad \text{隣接比}$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} \quad \text{部分集合の部分集合}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \quad \text{上方否定}$$

「部分集合の部分集合」 (三項変形) は最も有用な書き換え規則である。二重和から因子を外に出せる。

## 5 二項定理とその周辺

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

## ニュートンの一般二項級数

$\alpha \in \mathbb{C}$ 、 $|x| < 1$  のとき

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

## 多項定理

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_m = n \\ k_i \geq 0}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

相異なる項の個数は  $\binom{n+m-1}{m-1}$ 、係数の総和は  $m^n$  である。

## 7 和の恒等式 — 行方向

## 行の和

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = [n=0]$$

$$\sum_{k \text{ even}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ odd}} \binom{n}{k} = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

## 重み付きの行和

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & 0 \leq m < n \\ (-1)^n n!, & m = n \end{cases}$$

最後の式は差分作用素を  $n$  回適用したものと読める。 $m < n$  次の多項式は消える。

## 6 小さな例題

- **握手。**  $n$  人から二人を選ぶ： $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 。
- **部分集合。**  $n$  元集合の部分集合は  $2^n$  個、うち  $k$  元のものは  $\binom{n}{k}$  個。
- **格子路。**  $(0,0) \rightarrow (m,n)$  の単調な経路は、 $m+n$  歩のうちどれを右に進むかを選べばよく  $\binom{m+n}{m}$  通り。
- **二進列。** 長さ  $n$  で 1 がちょうど  $k$  個： $\binom{n}{k}$ 。前項と同じ対象である。全単射の原理そのもの。
- **五枚の手札。**  $\binom{52}{5} = 2598960$  通り。フルハウスは  $13 \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{2} = 3744$  通り。重複して数えぬよう、三枚組の数字から先に決める。
- **mississippi の並べ替え。**  $M^1 I^4 S^4 P^2$  より  $\frac{11!}{1! 4! 4! 2!} = 34650$  通り。
- **区別しない玉。** 10 個の同じ玉を 4 つの異なる箱へ： $\binom{10+3}{3} = 286$  通り。空箱を許さぬなら  $\binom{9}{3} = 84$  通り。
- **委員長つきの委員会。**  $n$  人から  $k$  人を選び一人を委員長とする： $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$  — 吸収律であり、二重数え上げによる証明でもある。

## 7 和の恒等式 — 列方向と量み込み

## 列の和 (ホッケースティック)

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \sum_{i=0}^m \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$$

## ヴァンデルモンドの量み込み

$$\sum_k \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

$r = m = n$  とし対称性を用いた特別な場合：

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

## 浅い対角線

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} = F_{n+1} \quad \text{フィボナッチ数、} F_1 = F_2 = 1$$

8 分割と仕切り棒法

$x_1 + \cdots + x_k = n$  の非負整数解の個数：

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

正の整数解 ( $x_i \geq 1$ )：

$$\binom{n-1}{k-1}$$

下限  $x_i \geq a_i$  がある場合は  $y_i = x_i - a_i$  と置換して

$$\binom{n - \sum a_i + k - 1}{k - 1}$$

不等式  $x_1 + \cdots + x_k \leq n$  の場合は余りの変数を一つ加えて  $\binom{n+k}{k}$ 。

上限 ( $x_i \leq b_i$ ) には閉じた式がない。どの変数が上限を超えるかについて包除原理 (§ 9) を用いる。

9 包除原理

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \\ \left| \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \right| &= \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \end{aligned}$$

完全順列 (攪乱順列)  $D_n$ ：不動点をもたない順列

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (n \geq 1)$$

$$D_n = n D_{n-1} + (-1)^n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_0 = 1, D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44$$

不動点がちょうど  $r$  個の順列は  $\binom{n}{r} D_{n-r}$  個。

全射  $[n] \rightarrow [m]$  の個数

$$\text{Surj}(n, m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n = m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

バーンサイドの補題 (軌道の数え上げ)

群  $G$  が集合  $X$  に作用するとき、軌道の個数は

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

首飾りや、回転・裏返しを同一視した彩色の数え上げに用いる。

10 十二通りの道 —  $n$  個の玉を  $k$  個の箱へ

| 玉     | 箱     | 任意                                                                 | 各箱に高々一個                   | 各箱に少なくとも一個                                               |
|-------|-------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------|
| 区別する  | 区別する  | $k^n$                                                              | $k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$ | $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ |
| 区別しない | 区別する  | $\binom{n+k-1}{n}$                                                 | $\binom{k}{n}$            | $\binom{n-1}{k-1}$                                       |
| 区別する  | 区別しない | $\sum_{j=1}^k \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}$ | $[n \leq k]$              | $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$    |
| 区別しない | 区別しない | $p_{\leq k}(n)$                                                    | $[n \leq k]$              | $p_k(n)$                                                 |

$p_k(n)$  は  $n$  をちょうど  $k$  個の正の部分に分割する方法の数、 $p_{\leq k}(n)$  は高々  $k$  個の部分に分割する方法の数である。漸化式は  $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$ 。

11 スターリング数 (第二種)

第二種スターリング数  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

$[n]$  を空でない  $k$  個のブロックに分割する方法の数。

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \quad x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

右の式は、通常のべきと下降階乗を結ぶ変換行列であると読める。

## 11 第一種スターリング数・ベル数・カタラン数

### 第一種スターリング数（符号なし） $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$

$[n]$  の順列のうち巡回置換をちょうど  $k$  個もつものの数。

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] \quad x^{\overline{n}} = \sum_k \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k$$

### ベル数

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$$

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, ...

### カタラン数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}, \quad C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad \sum_{n \geq 0} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

数える対象： $n$  組の括弧の正しい対応づけ、 $(0,0)$  から  $(n,n)$  への対角線を越えない単調格子路、 $(n+2)$  角形の三角形分割、 $n$  頂点の二分木。

## 12 母関数対応表

$$\binom{n}{k} = [x^k] (1+x)^n \quad \binom{n+k}{k} = [x^k] \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

| 数列 $a_n$                                                                    | $\sum a_n x^n$               |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| 1                                                                           | $\frac{1}{1-x}$              |
| $\binom{m}{n}$                                                              | $(1+x)^m$                    |
| $\binom{n+m-1}{n}$                                                          | $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$      |
| $C_n$ (カタラン数)                                                               | $\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ |
| $\binom{2n}{n}$                                                             | $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$      |
| $F_n$ (フィボナッチ数)                                                             | $\frac{x}{1-x-x^2}$          |
| $D_n/n!$ (指数型)                                                              | $\frac{e^{-x}}{1-x}$         |
| $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ ( $n$ の指数型) | $\frac{(e^x - 1)^k}{k!}$     |

母関数の積は畳み込みであり、「資源をどう分けるか」を選ぶことに対応する。ヴァンデルモンドの畳み込みもカタラン数の漸化式も、これ一行から出る。

## 13 二項係数の整数論

### ルジャンドルの公式

$n!$  に含まれる素数  $p$  の指数は

$$v_p(n!) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$$

$s_p(n)$  は  $n$  の  $p$  進表示における桁の和。

### クンマーの定理

$v_p \left( \binom{m+n}{m} \right)$  は、 $m$  と  $n$  を  $p$  進法で加えるときの繰り上がりの回数に等しい。

### リュカの定理

$p$  進表示を  $m = \sum m_i p^i$ 、 $r = \sum r_i p^i$  とすると

$$\binom{m}{r} \equiv \prod_i \binom{m_i}{r_i} \pmod{p}$$

系： $\binom{m}{r}$  が奇数となるのは、 $r$  の二進表示が  $m$  の部分マスクであるとき、すなわち  $r \& m = r$  のときに限る。

### よく使う整除性

$$p \mid \binom{p}{k} \quad (0 < k < p), \quad n+1 \mid \binom{2n}{n}$$

$$\binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n-1}, \quad \frac{n^k}{k!} \in \mathbb{Z} \quad (\text{常に})$$

## 14 評価と漸近挙動

### スターリングの近似

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3}) \right)$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + O(n^{-1})$$

### $\binom{n}{k}$ の評価

$$\left( \frac{n}{k} \right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left( \frac{en}{k} \right)^k$$

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq 2^{nH(k/n)} \quad (0 < k \leq n/2)$$

ここで  $H(q) = -q \log_2 q - (1-q) \log_2 (1-q)$  は二値エントロピーである。

### 中央二項係数

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}$$

### $k$ を固定し $n$ を大きくするとき

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \left( 1 + O\left( \frac{k^2}{n} \right) \right)$$

## 15 パスカルの三角形 (第 0-12 行)

第  $n$  行は  $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$  を並べたものである。総和は  $2^n$ 、符号を交互にすれば 0、各項は真上の二項の和に等しい。対角線を下向きに足すと、止めた位置の右下の項に一致する（ホッケースティック）。浅い対角線の和はフィボナッチ数、偶数行の中央は中央二項係数  $\binom{2m}{m}$  である。

## 16 数值表

| $n$ | $n!$      | $2^n$ | $\binom{2n}{n}$ | $C_n$  | $B_n$   | $D_n$     |
|-----|-----------|-------|-----------------|--------|---------|-----------|
| 0   | 1         | 1     | 1               | 1      | 1       | 1         |
| 1   | 1         | 2     | 2               | 1      | 1       | 0         |
| 2   | 2         | 4     | 6               | 2      | 2       | 1         |
| 3   | 6         | 8     | 20              | 5      | 5       | 2         |
| 4   | 24        | 16    | 70              | 14     | 15      | 9         |
| 5   | 120       | 32    | 252             | 42     | 52      | 44        |
| 6   | 720       | 64    | 924             | 132    | 203     | 265       |
| 7   | 5 040     | 128   | 3 432           | 429    | 877     | 1 854     |
| 8   | 40 320    | 256   | 12 870          | 1 430  | 4 140   | 14 833    |
| 9   | 362 880   | 512   | 48 620          | 4 862  | 21 147  | 133 496   |
| 10  | 3 628 800 | 1 024 | 184 756         | 16 796 | 115 975 | 1 334 961 |

$C_n$  はカタラン数、 $B_n$  はベル数、 $D_n$  は完全順列の数。

## 17 道具の選び方

### 三つの問い

1. **順序は意味をもつか。**  
もつなら  $P(n, k)$  または  $n^k$ 、もたないなら  $\binom{n}{k}$  または  $\binom{n}{k}$ 。
2. **重複は許されるか。**  
§3 の表のどちらの列にいるかが決まる。
3. **対象は区別できるか。**  
区別しない対象ならば、べき乗ではなく仕切り棒法が分割数である。

定石

- ・ **余事象**。悪い場合を数えて引く。「少なくとも一つ」はほぼ常に  $1 - \Pr(\text{一つもない})$  である。
- ・ **束ねる**。隣接を要求される対象は一つの塊とみなし、最後に塊の内部の並べ方を掛ける。
- ・ **すき間法**。隣接を禁じられる対象は、残りを並べてから  $(m!)$  すき間を選ぶ： $\binom{m+1}{k} k!$ 。
- ・ **多く数えて割る**。区別をつけて数え、対称性の群の位数で割る。
- ・ **全単射**。対象を符号化し直す（二進列、格子路、括弧列）。
- ・ **漸化式を立てる**。最後の元で場合分けする。パスカル・カタラン・スターリングの漸化式はいずれもこの形で得られる。

## 陥りやすい誤り

- ・ 順序をつけていない  $k$  個を  $k!$  で割ってしまう。
- ・ 区別しない対象があると  $n!$  が消えることを忘れる。
- ・ 「少なくとも」の問題での重複計上。単純な引き算ではなく包除原理を用いる。
- ・ 円順列では一つを固定して回転対称性を壊す。
- ・  $k > n$  のときの  $\binom{n}{k}$  は誤りではなく 0 である。

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{— 迷ったときは、最後の元を含むか否かで場合分けせよ。}$$